Université des lagunes **République de Côte d'Ivoire**

Licence 2 : Mathématiques **Année Universitaire : 2021/2022**

TRAVAUX DIRIGÉS : SUITES ET SÉRIES DE FONCTIONS

Les differents exercices doivent être préparés par les étudiants avant les séances de travaux dirigés.

Exercice 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit la fonction f_n sur $\mathbb{R}$ par : $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^2x^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

1. Étudier la convergence simple de la suite de fonctions (f_n) sur $\mathbb{R}$.
2. Étudier la convergence uniforme de la suite de fonctions (f_n) sur $\mathbb{R}$.
3. Soit $a > 0$. Montrer que la suite de fonctions (f_n) converge unifomément sur $]-\infty, -a] \cup [a, +\infty[$.

Exercice 2

Soit $n \in \mathbb{N}$. On définit la fonction f_n sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ par

$$f_n(x) = n\sin(x)\cos^n(x), \quad \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

1. Étudier la convergence simple de la suite de fonctions (f_n) sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
2. Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi/2} f_n(x)\mathrm{d}x$. La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
3. Soit $a > 0$. La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle unifomément sur $[0, a]$ et sur $\left[a, \frac{\pi}{2}\right]$?

Exercice 3

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction $f_n : \mathbb{R} \to [0, +\infty[$ par

$$f_n(x) = \sqrt{n}x\mathrm{e}^{-nx}, \qquad x \in [0, +\infty[.$$

1. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f que l'on déterminera.
2. La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle uniformément sur $[0, +\infty[$ vers la fonction f ?

Exercice 4

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on considère la fonction f_n définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = \frac{x^2}{(1+x^2)^n}.$$

Montrer que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est simplement convergente sur $\mathbb{R}$ mais qu'elle n'est pas uniformément convergente sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5

Pour tout $x \geq 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n(x) = \dfrac{x}{n^2 + x^2}$.

1. Montrer que la série de fonctions $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$.
2. Montrer que la série de fonctions $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n$ converge uniformément sur tout intervalle $[0, A]$ où $A > 0$.
3. Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum\limits_{k=n+1}^{2n} \dfrac{n}{n^2 + k^2} \geq \dfrac{1}{5}$.
4. Montrer que la série de fonctions $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 6

On définit pour tout entier $n \geq 2$ la fonction un sur $\mathbb{R}^+$ de la manière suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \; f_n(x) = \frac{1}{x + n^2 - 1}$$

1. Montrer que la série de fonction $\sum\limits_{n \geq 2} f_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$. On appelera S la somme.
2. Montrer que la fonction S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$.
3. L'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} S(x)\mathrm{d}x$ converge-t-elle ?
4. Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^{1} S(x)\mathrm{d}x$.

Exercice 7

On considère la série de fonctions dont le terme général f_n est défini par

$$f_n(x) = \frac{e^{-nx}}{1 + n^2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \; \forall x \in [0, +\infty[.$$

1. Montrer que la série de fonctions $\sum\limits_{n \geq 0} f_n$ converge normalement sur $[0, +\infty[$.

   On note f sa somme.
2. Prouver que f est continue sur $[0, +\infty[$.
3. Calculer pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in [0, +\infty[$ la dérivée $f'_n(x)$.
4. Montrer que la série de fonctions $\sum\limits_{n \geq 0} f'_n$ converge simplement sur $]0, +\infty[$.
5. Montrer que la série de fonctions $\sum\limits_{n \geq 0} f'_n$ converge uniformément surtout intervalle de la forme $[\alpha, +\infty[$ où $\alpha > 0$
6. En déduire que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.